L'equazione di moto

Proiettiamo il principio della quantità di moto lungo l'asse S:

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} + F_{rs}^{out} - F_{rs}^{in} = G_s + \Pi_s$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho U)}{\partial t}\cdot \Omega\, ds + (\beta\rho Q U)_{s+ds} + \frac{U\rho\left[(\Omega)_{t+dt} - (\Omega)_t\right]}{dt}\, ds - (\beta \rho Q U)_s =$$

$$= -\rho g \Omega \left[(z)_{s+ds} - (z)_s\right] + (p\Omega)_s - (p\Omega)_{s+ds} - \tau_0 B\, ds + p\left[(\Omega)_{s+ds} - (\Omega)_s\right]$$

Riscrivibile come:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t}\Omega\, \cancel{ds} + \frac{\partial(\beta\rho Q U)}{\partial s}\cancel{ds} + \rho U \frac{\partial\Omega}{\partial t}\cdot ds =$$

$$= -\rho g \Omega \frac{\partial z}{\partial s} \cancel{ds} - \frac{\partial (p\Omega)}{\partial s}\cancel{ds} + p\frac{\partial \Omega}{\partial s}\cancel{ds} - \tau_0 B\, \cancel{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho U \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\rho Q U)}{\partial s} = -\rho g\Omega\frac{\partial z}{\partial s} - \cancel{p\frac{\partial\Omega}{\partial s}} - \Omega\frac{\partial p}{\partial s} + \cancel{p\frac{\partial \Omega}{\partial s}} - \tau_0 B$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t}U + \frac{\partial U}{\partial t}\rho\Omega + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s}\beta U + \frac{\partial(\beta U)}{\partial s}\rho Q = -\rho g\Omega \frac{\partial z}{\partial s} - \Omega\frac{\partial p}{\partial s} - \tau_0 B$$

Nel caso di moto turbolento $\beta \simeq 1$ e $\frac{\partial(\rho\Omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t}\rho\Omega + \frac{\partial U}{\partial s}\rho Q = -\rho g \Omega\frac{\partial z}{\partial s} - \Omega\frac{\partial p}{\partial s} - \tau_0 B \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\rho g \Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t}\cdot\frac{1}{g} + \frac{\partial U}{\partial s}\cdot\frac{U}{g} = -\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau_0 B}{\rho g\Omega}$$

Per fluido incomprimibile $-\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\partial h}{\partial s}$ e $\frac{U}{g}\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right)$

quindi:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{U^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau_0 B}{\gamma\Omega}$$

Se il moto è stazionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Inoltre $H = h + \frac{U^2}{2g}$, allora:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{\tau_0 B}{\gamma \Omega}$$

Il carico totale diminuisce nella direzione S. Bisogna compiere lavoro esterno per far muovere il fluido. È l'equazione di moto. Chiamiamo $\frac{\tau_0 B}{\gamma\Omega} = j$, perdita di carico per unità di lunghezza.